

Docket No.: MAS-FIN-196

IN THE UNITED STATES PATENT AND TRADEMARK OFFICE

Applicant : GEORG DENK ET AL.

Filed : CONCURRENTLY HEREWITH

Title : METHOD FOR ON-DEMAND GENERATION OF INDIVIDUAL RANDOM NUMBERS OF A SEQUENCE OF RANDOM NUMBERS OF A 1/F NOISE

CLAIM FOR PRIORITY

Commissioner for Patents
P.O. Box 1450
Alexandria, VA 22313-1450

Sir:

Claim is hereby made for a right of priority under Title 35, U.S. Code, Section 119, based upon the German Patent Application 100 64 688.3, filed December 22, 2000.

A certified copy of the above-mentioned foreign patent application is being submitted herewith.

Respectfully submitted,

LAURENCE A. GREENBERG
REG. NO. 29,308


For Applicants

Date: June 23, 2003

Lerner and Greenberg, P.A.
Post Office Box 2480
Hollywood, FL 33022-2480
Tel: (954) 925-1100
Fax: (954) 925-1101

/kf

BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND



Prioritätsbescheinigung über die Einreichung einer Patentanmeldung

Aktenzeichen: 100 64 688.3

Anmeldetag: 22. Dezember 2000

Anmelder/Inhaber: Infineon Technologies AG, München/DE

Bezeichnung: Verfahren zum bedarfsorientierten Erzeugen
einzelner Zufallszahlen einer Folge von
Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens

IPC: G 07 c, G 06 F

Die angehefteten Stücke sind eine richtige und genaue Wiedergabe der ursprünglichen Unterlagen dieser Patentanmeldung.

München, den 23. Mai 2003
Deutsches Patent- und Markenamt

Der Präsident
Im Auftrag

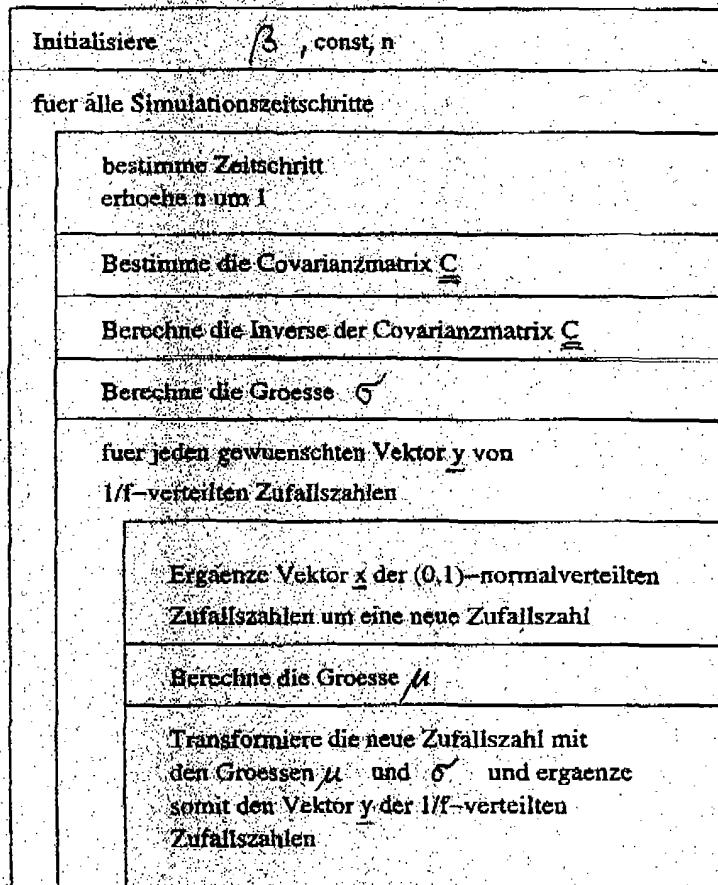


Fig. 2

Beschreibung

Verfahren zum bedarfsorientierten Erzeugen einzelner Zufallszahlen einer Folge von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens

5

Die Erfindung betrifft ein Verfahren zum Erzeugen von Folgen von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens.

Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens können beispielsweise bei 10 einer transienten Schaltkreissimulation eingesetzt werden, die Rauscheinflüsse berücksichtigt. Unter einem 1/f-Rauschen wird ein stochastischer Prozess mit einem bestimmten Frequenzspektrum verstanden, das mit der Gleichung

15

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\beta}, \beta \in]0,1[$$

beschrieben werden kann.

1/f-Rauschquellen eignen sich zur Modellierung von Rauscheinflüssen in einer Vielzahl technischer und physikalischer Systeme sowie für Systeme zur Einschätzung und Vorhersage von Geschehnissen auf den Finanzmärkten. Insbesondere weisen viele elektronische Bauelemente wie beispielsweise pn-Dioden und MOS-Feldeffekttransistoren 1/f-Rauschquellen auf.

25

Es ist möglich, 1/f-Rauschquellen dadurch zu approximieren, daß eine Summation der Effekte vieler Rauschquellen durchgeführt wird, die als Frequenzspektrum jeweils ein Lorentz-Spektrum aufweisen. Solche Rauschquellen können beispielsweise durch die Systemantwort eines linearen zeitinvarianten Systems, das auch als LTI-System bezeichnet werden kann, modelliert werden, an dessen Systemeingang ein weisses Rauschen angelegt wird. Bei dieser Vorgehensweise ist von Nachteil,

daß die Dimension des numerisch zu lösenden Differentialgleichungssystems über die Maßen aufgebläht wird. Dadurch ergeben sich lange Rechenzeiten und ein hoher Speicherbedarf eines Computersystems, das zur Simulation eines Systems verwendet wird, das dem Einfluß eines $1/f$ -Rauschens unterliegt.

Es ist Aufgabe der Erfindung, ein Verfahren zum Erzeugen einer Folge von Zufallszahlen eines $1/f$ -Rauschens anzugeben, das schnell und mit geringem Rechenaufwand durchgeführt werden kann. Es ist weiterhin Aufgabe der Erfindung, ein verbessertes Verfahren zur Simulation eines technischen Systems anzugeben, das einem $1/f$ -Rauschen unterliegt. Schließlich soll auch ein Computersystem mit einem Computerprogramm zur Bestimmung von Folgen von Zufallszahlen eines $1/f$ -Rauschens angegeben werden, das schnell ausgeführt werden kann und das nur wenig Ressourcen eines Computersystems beansprucht.

Diese Aufgabe wird durch die Gegenstände der unabhängigen Patentansprüche gelöst. Verbesserungen ergeben sich aus den jeweiligen Unteransprüchen.

Gemäß der Erfindung wird das Problem der Rauschsimulation bei der Modellierung des zu simulierenden Systems in das Problem der Generierung einer Zufallszahlen-Sequenz überführt. Gemäß der Erfindung werden die Korrelationen dieser Zufallszahlen bestimmt, was zu einer einfachen und genauen Generierung der entsprechenden Zufallszahlen-Sequenzen verwendet wird.

Das erfindungsgemäße Verfahren zum Erzeugen wenigstens einer Folge von Zufallszahlen eines $1/f$ -Rauschens, sieht dabei zunächst die folgenden Schritte vor:

- Bestimmen eines gewünschten Spektralwerts β ,
- Bestimmen einer Intensitätskonstante const.

Dadurch werden die Charakteristika des zu simulierenden 1/f-Rauschens festgelegt.

Danach wird die Anzahl der zu erzeugenden Zufallszahlen eines 5 1/f-Rauschens und ein Startwert für eine zur Simulation benutzten Laufvariable n festgelegt.

Die Erfindung sieht solange, bis die gewünschte Anzahl von 10 Elementen $y(n)$ eines oder mehrerer Vektoren y der Länge n aus 1/f-verteilten Zufallszahlen berechnet ist, das schleifenartige Wiederholen der folgenden Schritte vor:

- Erhöhen des aktuellen Werts der Laufvariable n um 1,
- Festlegen eines Simulationszeitschritts $[t_{n-1}; t_n]$,
- Bestimmen der Elemente \underline{C}_{ij} einer Covarianzmatrix \underline{C} der Dimension $(n \times n)$ nach der folgenden Vorschrift:

$$\underline{C}_{ij} := \text{const} \cdot \left(-|t_j - t_i|^{\beta+1} + |t_{j-1} - t_i|^{\beta+1} + |t_j - t_{i-1}|^{\beta+1} - |t_{j-1} - t_{i-1}|^{\beta+1} \right), \\ i, j = 1, \dots, n$$

- Bestimmen einer Matrix \underline{C}^{-1} durch Invertieren der Covarianzmatrix \underline{C} ,
- Bestimmen einer Größe σ gemäß der Vorschrift

20 $\sigma = \text{sqrt}(1 / e(n, n))$,

wobei sqrt die Funktion "Quadratwurzel" und wobei $e(n, n)$ das durch (n, n) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} bezeichnet,

- Bestimmen einer $(0, 1)$ -normalverteilten Zufallszahl, die 25 die n -te Komponente eines Vektors x der Länge n bildet,
- Bilden einer Größe μ aus den ersten $(n - 1)$ Komponenten der n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} und den $(n-1)$ Elementen des Vektors y , die für einen vorausgehenden $(n-1)$ Simulations-Zeitschritt berechnet wurden,
- 30 und zwar gemäß der folgenden Vorschrift:

$$\mu = - \frac{\underline{y}_{(n-1)}^T \cdot \underline{C}_{n,n}^{-1}}{\underline{C}_{n,n}^{-1}}$$

wobei $\underline{y}_{(n-1)}$ die ersten $(n - 1)$ Komponenten des Vektors \underline{y} bezeichnet, wobei $\underline{C}_{n,n}^{-1}$ die ersten $(n - 1)$ Komponenten der n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} bezeichnet und wobei $\underline{C}_{n,n}^{-1}$ das mit (n,n) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} bezeichnet.

- Berechnen eines Element $y(n)$ eines Vektor \underline{y} der Länge n aus 1/f-verteilten Zufallszahlen nach folgender Vorschrift:

10.
$$Y(n) = x(n) * \sigma + \mu$$

Mit dem erfindungsgemäßen Verfahren können Simulationen von technischen Systemen beliebig verlängert werden. Hierzu können auf einfache Weise zusätzliche 1/f-verteilte Zufallszahlen generiert werden, wenn bereits generierte 1/f-verteilte Zufallszahlen vorliegen. Außerdem kann eine Simulation auf den Ergebnissen von zuvor simulierten Zeitintervallen aufgesetzt werden. Diese sogenannte Restart-Fähigkeit stellt eine für die Simulationspraxis sehr wichtige Eigenschaft dar. Gerade für 1/f-Rauschquellen ist dies nur schwierig zu erreichen, weil Zufallszahlen, die eine 1/f-Rauschquelle für ein gewisses Zeitintervall simulieren, von bereits numerisch bestimmten Zufallszahlen für frühere Zeitintervalle abhängen. Die vorliegende Erfindung gestattet auch die Verwendung einer adaptiven Schrittweitensteuerung, ohne daß hierdurch die Rechenzeiten zur Simulation eines technischen Systems signifikant erhöht werden. Eine solche adaptive Schrittweitensteuerung steigert die Präzision und die Rechenzeiteffizienz bei der numerischen Bestimmung der Dynamik eines simulierten technischen Systems erheblich.

Es ist beim erfindungsgemäßen Verfahren nicht mehr notwendig, das zu simulierende Zeitintervall vorzugeben. Gerade durch das Vorsehen von variablen Schrittweiten kann auch eine Adaption an aktuelle Systemdynamiken erfolgen, was die Genauigkeit der Simulationen erhöht.

Die vorliegende Erfindung gibt ein Verfahren an, um Sequenzen von 1/f-verteilten Zufallszahlen sukzessive, also Element für Element, zu generieren. Dabei stellt das Verfahren sicher, daß jede neu generierte Zufallszahl auf korrekte Weise im stochastischen Sinne von den zuvor generierten 1/f-verteilten Zufallszahlen abhängt. Dadurch ist es möglich, im Verlauf der numerischen Simulation eines Schaltkreises die jeweils benötigten Zufallszahlen zu erzeugen.

Die Erfindung verwendet die Theorie bedingter Wahrscheinlichkeitsdichten, um eine 1/f-verteilte Zufallszahl zu erzeugen, die korrekt den stochastischen Zusammenhang dieser Zufallszahl mit dem bereits erzeugten und für vorangegangene Simulationsschritte benötigten Zufallszahlen sicherstellt.

In einer besonders vorteilhaften Ausgestaltung des erfindungsgemäßen Verfahrens werden q Folgen von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens gleichzeitig berechnet werden, wobei anstelle der schleifenartig zu wiederholenden Schritte:

- Bestimmen einer $(0,1)$ -normalverteilten Zufallszahl, die die n -te Komponente eines Vektors \underline{x} der Länge n bildet,
- Bilden einer Größe μ aus den ersten $(n - 1)$ Komponenten der n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix $\underline{\Sigma}^{-1}$ und den $(n-1)$ Elementen des Vektors \underline{y} , die für einen vorausgehenden $(n-1)$ -Simulations-Zeitschritt berechnet wurden, und zwar gemäß der folgenden Vorschrift:

$$\mu = - \frac{\underline{y}_{(n-1)}^T \cdot \underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}}{\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}}$$

wobei $\underline{y}_{(n-1)}$ die ersten $(n - 1)$ Komponenten des Vektors \underline{y} bezeichnet, wobei $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}$ die ersten $(n - 1)$ Komponenten der n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix $\underline{\underline{C}}^{-1}$ bezeichnet und wobei $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}$ das mit (n,n) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix $\underline{\underline{C}}^{-1}$ bezeichnet,

- Berechnen eines Element $y(n)$ eines Vektor \underline{y} der Länge n aus 1/f-verteilten Zufallszahlen nach folgender Vorschrift:

$$10 \quad Y(n) = \underline{x}(n) \cdot \sigma + \mu$$

die folgenden Schritte vorgesehen sind:

- Bestimmen von q Stück $(0,1)$ -normalverteilte Zufallszahlen $\underline{x}_{k,n}$, die die jeweils letzte Komponente der Vektoren \underline{x}_k der Länge n bilden, wobei $k = 1, \dots, q$. Hierbei ist zu beachten, dass die jeweils ersten $(n - 1)$ Komponenten der Vektoren \underline{x}_k bereits im Schritt zuvor berechnet wurden.
- Bilden von q Größen μ_k gemäß der folgenden Vorschrift:

$$\mu_k = - \frac{\underline{y}_{(n-1)k}^T \cdot \underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}}{\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}}$$

wobei $\underline{y}_{(n-1)k}$ die ersten $(n - 1)$ Komponenten des Vektors \underline{y}_k bezeichnet, die für einen vorausgehenden Simulations-Zeitschritt berechnet wurden. $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}$ bezeichnet die ersten $(n - 1)$ Komponenten der n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix $\underline{\underline{C}}^{-1}$ und $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}$ bezeichnet das mit (n,n) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix $\underline{\underline{C}}^{-1}$. Dies wird für $k = 1, \dots, q$ durchgeführt,

FIN 196 P/200019753

7

- Berechnen von q Elementen $y_{k,n}$, die die jeweils n-te Komponente des Vektors y_k der Länge n aus 1/f-verteilten Zufallszahlen bilden, und zwar nach folgender Vorschrift:

5

$$y_{k,n} = x_{k,n} * \sigma + \mu_k$$

wobei $k = 1, \dots, q$.

Die q Vektoren y_k ($k = 1, \dots, q$) der Länge n aus 1/f-verteilten Zufallszahlen werden besonders vorteilhaft in einer Matrix NOISE angeordnet, die in einer Simulation die 1/f-Rauscheinflüsse eines zu simulierenden Systems angeben.

Dem Konzept zur Simulation von 1/f-Rauschen liegt gemäß der Erfindung der folgende Gedankengang zugrunde. Die Dynamik eines Systems, das stochastischen Einflüssen ausgesetzt ist, wird adäquat durch einen stochastischen Prozeß modelliert.

Zur Simulation einer solchen Systemdynamik werden im allgemeinen einzelne Zufalls-Realisierungen (sogenannte Pfade) des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses numerisch berechnet. Zur Simulation von Systemen mit 1/f-Rauschquellen gilt es, Pfade von stochastischen Integralen der Form

$$\int_0^t Y(s) \eta_1(s) ds$$
 numerisch zu berechnen. Hierbei bezeichnen s

(Integrationsvariable) und t (obere Integrationsgrenze) die

Zeit, $\eta_1(s) ds$ eine 1/f-Rauschquelle und $Y(s)$ einen stochastischen Prozess, der die zeitliche Dynamik einer Größe, z.B. der elektrischen Spannung in der Schaltkreissimulation, beschreibt.

Wenn man mit $B_{FBM}(s)$ denjenigen stochastischen Prozess bezeichnet, dessen Ableitung (mathematisch: Ableitung im Dis-

tributionssinn) den $1/f$ -Rauschprozess $\eta_{\frac{1}{f}}(s)$ ergibt, so lässt

sich das zu berechnende stochastische Integral schreiben als

$$\int_0^t Y(s) \eta_{\frac{1}{f}}(s) ds = \int_0^t Y(s) dB_{FBM}(s) \quad (1.1)$$

5

Das Integral der rechten Seite ist als Riemann-Stieltjes-Integral des stochastischen Prozesses $Y(s)$ mit dem Prozess $B_{FBM}(s)$ als Integrator aufzufassen. Dieses Integral lässt sich durch eine Summe approximieren, indem das Integrationsintervall $[0, t]$ gemäß $0 = t_0 < t_1 < \dots < t = t$ in n disjunkte Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}], i=1, \dots, n$, zerlegt wird:

$$\int_0^t Y(s) dB_{FBM}(s) \approx \sum_{i=1}^n Y(t_{i-1}) [B_{FBM}(t_i) - B_{FBM}(t_{i-1})] \quad (1.2)$$

15 Diese Summe ist eine Zufallsvariable. Die Abhängigkeit vom Ergebnis ω des Zufallsexperiments wurde konsistent weggelassen.

20 Ein Prozess $B_{FBM}(s)$, dessen verallgemeinerte Ableitung ein $1/f$ -Spektrum aufweist, ist in der Literatur unter dem Namen 'Fractional Brownian Motion' bekannt. $B_{FBM}(s)$ ist ein Gaußscher stochastischer Prozess und als solcher vollständig charakterisiert durch seinen Erwartungswert

$$25 E(B_{FBM}(s)) = 0 \quad \forall s \in R \quad (1.3)$$

und durch seine Covarianzfunktion

$$30 Cov(B_{FBM}(s), B_{FBM}(t)) = \text{const.} (|s|^{\beta+1} + |t|^{\beta+1} - |t-s|^{\beta+1}) \quad (1.4)$$

Das erfindungsgemäße Verfahren zur bedarfsorientierten Generierung geeigneter Zufallszahlen führt die Simulation von 1/f-Rauscheinflüssen im wesentlichen auf die Erzeugung von Realisierungen der Zufallsvariablen $[B_{FBM}(t_i) - B_{FBM}(t_{i-1})]$, also von Zuwächsen der Fractional Brownian Motion, zurück.

Die vorliegende Erfindung erlaubt es, die benötigten Realisierungen der Zufallsvariablen $\Delta B_{FBM}(i)$ online, d.h. im Verlauf der sukzessiven Integration der Systemgleichungen, zu erzeugen. Daraus resultieren zwei Anforderungen an das Verfahren:

(a) Die Länge n der Sequenz von Zufallszahlen

$\{\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n)\}$ muß während eines Simulationslaufs variabel bleiben. Insbesondere muß es jederzeit möglich sein, die Simulation zu verlängern (Restart-Fähigkeit). Dies impliziert die Fähigkeit des Verfahrens, die hierfür benötigten zusätzlichen Zufallszahlen so zu generieren, daß sie auf korrekte Weise mit der bereits generierten Teilsequenz koreliert.

(b) Sei t_i die im Laufe einer Simulation aktuell erreichte Zeit. Dann muß das Zeitintervall $[t_i, t_{i+1}]$, also die Schrittweite des nächsten Integrationsschritts aus der momentanen Systemdynamik heraus - also adaptiv - bestimmbar sein.

Die Erfindung wird beiden Anforderungen gerecht, indem sie eine Vorschrift angibt, wie eine Realisierung von

$\{\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n)\}$, also eine Sequenz von Zufallszahlen, sukzessive, d.h. Element für Element generiert werden kann.

FIN 196 P/200019758

10

Hierbei ist die Schrittweite $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ für jede neue Zufallszahl frei wählbar.

Zunächst wird der Ansatz für sogenannte "bedingte Dichten" 5 untersucht.

Es wird zunächst die Verteilung des Zufallsvariablen-Vektors $(\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n))$ betrachtet.

10 Da die einzelnen Zufallsvariablen $\Delta B_{FBM}(i)$ Zuwächse eines Gaußschen stochastischen Prozesses darstellen, ist der Zufallsvariablen-Vektor $(\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n))$ eine n -dimensionale Gauß-verteilte Zufallsvariable und somit durch seinen (n -dimensionalen) Erwartungswert E und seine Covarianzmatrix C vollständig bestimmt. Die beiden Größen lassen sich aus den Formeln (1.3) und (1.4) berechnen zu

$$E(\Delta B_{FBM}(i)) = 0, i=1, \dots, n \quad (3.5)$$

$$20 \quad \underline{C}_{i,j} := Cov(\Delta B_{FBM}(i), \Delta B_{FBM}(j)) = const \cdot \left(-|t_j - t_i|^{\beta+1} + |t_{j-1} - t_i|^{\beta+1} \right. \\ \left. + |t_j - t_{i-1}|^{\beta+1} - |t_{j-1} - t_{i-1}|^{\beta+1} \right), \\ i, j = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

Das erfindungsgemäße Online-Verfahren soll nun in Form einer vollständigen Induktion angegeben werden.

25 Induktionsanfang – und somit Startpunkt des Verfahrens – ist die Realisierung einer reellwertigen Gaußverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sum_{ii} = 2 \cdot const \cdot |\Delta t_i|^{\beta+1}$.

Im Sinne eines Induktionsschlusses müssen wir angeben, wie wir eine Realisierung von $(\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n-1))$ erweitern um eine Realisierung von $\Delta B_{FBM}(n)$, so daß sich insgesamt eine Realisierung von $(\Delta B_{FBM}(1), \dots, \Delta B_{FBM}(n))$ ergibt. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei die bereits "gewürfelte" Teilsequenz von Zufallszahlen mit $(y_1, \dots, y_{n-1}) = y_{(n-1)}^T$ und die noch zu würfelnde Realisierung von $\Delta B_{FBM}(n)$ mit y_n bezeichnet.

10 Das Problem kann nun folgendermaßen formuliert werden:
Gegeben sei eine n -dimensionale mittelwertfreie Gaußsche Zufallsvariable Z mit der Covarianzmatrix \underline{C} . Die ersten $n-1$ Elemente einer Realisierung von Z seien in Form eines Zufallszahlen-Vektors $y_{(n-1)}$ bereits gewürfelt und bekannt.

15 Gesucht ist nun die Verteilung, aus der das n -te Element y_n gezogen werden muß, um $y_{(n-1)}$ zu einer Realisierung $y = (y_{(n-1)}, y_n)$ von Z zu vervollständigen.

20 Eine Lösung dieser Aufgabe kann gefunden werden, wenn man die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $f(y_n | y_{(n-1)})$ für y_n – unter der Bedingung, daß $y_{(n-1)}$ bereits festliegt – betrachtet. Diese Größe läßt sich im vorliegenden Fall einer Gaußschen Normalverteilung berechnen zu

$$25 \quad f(y_n | y_{(n-1)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{1}{C_{n,n}^{-1}}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{C_{n,n}^{-1}} (y_n - \mu)^2 \right\}.$$

(3.7)

Hierbei ergibt sich die Größe $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}$ aus folgender Schreibweise
der invertierten Covarianzmatrix $\underline{\underline{C}}^{-1}$:

$$\underline{\underline{C}}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{C}}_{(n-1)}^{-1} & \underline{\underline{C}}_{(n-1),n}^{-1} \\ \hline \left(\underline{\underline{C}}_{(n-1),n}^{-1} \right)^T & \underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1} \end{array} \right)$$

5

(3.8)

wobei $\underline{\underline{C}}_{(n-1)}^{-1} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$, wobei $\underline{\underline{C}}_{(n-1),n}^{-1} \in R^{(n-1) \times 1}$ und wobei $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1} \in R^{1 \times 1}$.

FIN 196 P/200019753

13

Die Größe μ steht für

$$\mu_i = -\frac{\mathbf{y}_{(n-1)}^T \mathbf{C}_{\text{min},n}^{-1}}{\mathbf{C}_{\text{min},n}^{-1}} \quad (3.9)$$

5. Die bedingte Dichte $f(y_n | y_{(n-1)})$ ist also die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Gaußschen Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz $\frac{1}{C_{n,n}}$.

Damit obige Varianz existiert, muß gelten $C_{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}} \neq 0$. Dies ist

10. aufgrund folgender Argumentation sichergestellt:

C und C^{-1} haben die selben Eigenrichtungen und inverse Eigenwerte. Ein Eigenwert 0 der Matrix C^{-1} hätte also eine unendliche Varianz des Zufallsvariablen-Vektors $(A B \dots 1)^\top (A B \dots n)^\top$ zur Folge. Es kann daher vorausgesetzt

15 werden, daß alle Eigenwerte von \underline{C}^{-1} ungleich Null sind. Da die Eigenwerte von \underline{C}^{-1} in jedem Fall nicht negativ sind, gilt somit: Die Matrix \underline{C}^{-1} ist symmetrisch und positiv definit.

Durch Umbenennung der Koordinatenachsen kann diese Matrix von der Form (3.8) auf folgende Form gebracht werden:

20

$$\bar{\underline{\underline{C}}}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\underline{\underline{C}}}^{-1}_{n,n} & \left(\bar{\underline{\underline{C}}}^{-1}_{n,n} \right)^T \\ \bar{\underline{\underline{C}}}^{-1}_{n,n} & \bar{\underline{\underline{C}}}^{-1}_{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Diese Matrix ist per constructionem ebenfalls symmetrisch und positiv definit. Gemäß des Sylvester-Kriteriums für symmetri-

FIN 196 P/200019753

14

sche und positiv definite Matrizen folgt daraus, daß

$\left(\frac{1}{C_n}\right)_n = C^{-1} > 0$, und die Behauptung ist gezeigt.

Durch das erfindungsgemäße Verfahren wird die Simulation von

$\frac{1}{f}$ -Rauschquellen zurückgeführt auf die Generierung von Gauß-

5 verteilten Zufallszahlen.

Um eine Zufallszahl y_n zu erzeugen, die mit einer bereits erzeugten Sequenz $y_{(n-1)}$ auf die geforderte Weise korreliert, wird die invertierte Covarianzmatrix C^{-1} (eine $n \times n$ -Matrix) benötigt. Streng genommen ist nur die Kenntnis der n -ten Zeile dieser Matrix von noten, also die Kenntnis von $(C^{-1})_{(n,n)}^T, C^{-1}_{(n,n)}$. Wie an Formel (3.6) abzulesen ist, hängt die

Covarianzmatrix \underline{C} von der Zerlegung des Simulationsintervalls $[0, t_n]$ in disjunkte Teilintervalle (Schrittweiten) $[t_{i-1}, t_i]$ ab. Insbesondere hängt die letzte Spalte von \underline{C} (wegen der Symmetrie von \underline{C} identisch mit der letzten Zeile) ab von t_n und damit von der aktuellen Schrittweite $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$.

Die linke obere $(n-1) \times (n-1)$ -Teilmatrix \tilde{C} der $n \times n$ -

20 Covarianzmatrix \underline{C} ist genau die Covarianzmatrix für eine Zufallszahlen-Sequenz der Länge $n-1$. Diese Covarianzmatrix mußte bereits für die Berechnung von $y_{(n-1)}$ (bzw. für die Berechnung des letzten Elements $y_{(n)}$) bestimmt und invertiert werden. Zur Beschleunigung des Verfahrens kann somit auf inkrementelle Verfahren zur Matrixinversion, z.B. mittels des Schur-Komplements, zurückgegriffen werden.

25

Die Erfindung ist auch in einem Verfahren zur Simulation eines technischen Systems verwirklicht, das einem $1/f$ -Rauschen unterliegt. Dabei werden bei der Modellierung und/oder bei der Festlegung der am Eingangskanälen des Systems anliegenden 5 Größen Zufallszahlen verwendet werden, die mit einem erfindungsgemäßen Verfahren bestimmt worden sind.

Ebenso ist ein Computersystem und/oder ein Computerprogramm zur Bestimmung von Folgen von Zufallszahlen eines $1/f$ - 10 Rauschens oder zur Ausführung der anderen erfindungsgemäßen Verfahren vorgesehen. Die Erfindung ist auch in einem Datenträger mit einem solchen Computerprogramm verwirklicht. Weiterhin ist die Erfindung in einem Verfahren verwirklicht, bei dem ein erfindungsgemäßes Computerprogramm aus einem elektronischen Datennetz wie beispielsweise aus dem Internet auf einen an das Datennetz angeschlossenen Computer heruntergeladen 15 wird.

Die Erfindung ist in der Zeichnung anhand eines Ausführungs- 20 beispiels erläutert.

Die Erfindung ist in der Zeichnung anhand mehrerer Ausführungsbeispiele erläutert.

25 Figur 1 zeigt eine schematische Darstellung eines zu simu- lierenden technischen Systems,
Figur 2 zeigt ein Struktogramm zur Bestimmung von Folgen von Zufallszahlen eines $1/f$ -Rauschens,
Figur 3 zeigt anhand seiner Unterfiguren 3a bis 3f ein Be- 30 rechnungsbeispiel für einen ersten Simulations- Zeitschritt,

Figur 4 zeigt anhand seiner Unterfiguren 4a bis 4f ein Berechnungsbeispiel für einen zweiten Simulations-
Zeitschritt.

Figur 5 zeigt anhand seiner Unterfiguren 5a bis 5f ein Berechnungsbeispiel für einen dritten Simulations-
Zeitschritt.

Figur 1 zeigt eine schematische Darstellung eines rauschbe-
hafteten Systems, das simuliert werden soll.

Das System wird durch ein als Kasten angedeutetes Systemmodell 1 beschrieben, das das Systemverhalten beschreibt. Das Systemverhalten ergibt sich aus den Eingangskanälen 2, die auch als Vektor INPUT bezeichnet werden, und aus den Aus-
gangskanälen 3, die auch als OUTPUT bezeichnet werden.

Weiterhin ist ein systembedingtes Rauschen vorgesehen, das an Rauscheingangskanälen 4 anliegt und das auch als Vektor bzw. Matrix NOISE bezeichnet wird. Eine Matrix NOISE liegt dann vor, wenn das Rauschen mit mehreren Kanälen berücksichtigt wird, wobei jede Spalte der Matrix NOISE einen Vektor von Rauschwerten enthält, die an einem Rauscheingangskanal anliegen.

Das Rauschen an den Rauscheingangskanälen 4 wird vorzugsweise als rauschbedingte Veränderung des Systemmodells 1 aufgefaßt.

Das Verhalten der Eingangskanäle 2 und der Ausgangskanäle 3 kann durch ein System von Differentialgleichungen oder durch ein System von Algebro-Differentialgleichungen beschrieben werden, so daß zuverlässige Vorhersagen des Systemverhaltens möglich sind.

Zu jedem Zeitschritt der Simulation des in Figur 1 gezeigten Systems wird für einen an den Eingangskanälen 2 anliegenden Vektor INPUT und für einen an den Rauscheingangskanälen 4 anliegenden Vektor NOISE ein Vektor OUTPUT der Ausgangskanäle 3 berechnet.

Sinnvollerweise werden zur Simulation über einen längeren Zeitraum die Vektoren INPUT, OUTPUT, NOISE als Matrix angegeben, wobei je eine Spalte k der betreffenden Matrix die Werte 10 der entsprechenden Zeitreihe des betreffenden INPUT, OUTPUT, NOISE enthält.

Figur 2 veranschaulicht, wie man zu je einem Vektor y_k gelangt, der eine Spalte k der Matrix NOISE für die Rauschein- 15 gangskanäle 4 des Systemmodells 1 bildet. Jeder Vektor y_k dient zur Simulation einer Rauschquelle.

In einem ersten Schritt wird ein gewünschter Spektralwert β sowie die Intensitätskonstante const festgelegt. Weiterhin 20 wird der Zähler n des aktuellen Simulations-Zeitintervalls auf 0 gesetzt.

Nun wird sukzessive für jeden Simulations-Zeitschritt die 25 folgende Abfolge von Rechenschritten durchgeführt.

Zunächst wird der aktuelle Simulations-Zeitschritt festgelegt. Äquivalent hierzu kann auch das Ende des aktuellen Simulationszeitschritts festgelegt werden, wodurch sich der nächste Betrachtungszeitpunkt ergibt.

Danach wird der Zähler n des aktuellen Simulationszeit- 30 schritts um eins hochgezählt.

FIN 196 P/200019753

18

Anschließend wird die Covarianzmatrix \underline{C} der Dimension $(n \times n)$ nach Gleichung (3.6) bestimmt.

Hierauf folgt der Schritt des Invertierens der Matrix \underline{C} , beispielsweise mittels einer Cholesky-Zerlegung. Zur Steigerung der Effizienz kann dabei auch auf die inverse Matrix des vorherigen Schrittes zugegriffen werden, beispielsweise bei Verwendung von Schurkomplement-Techniken.

10. Als nächstes wird die Größe σ aus der Formel

$$\sigma = \text{sqrt}(1 / e(n,n))$$

berechnet, wobei sqrt die Funktion "Quadratwurzel" und wobei 15 $e(n,n)$ das durch (n,n) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} bezeichnet.

20. Außerdem wird ein Wert einer $(0,1)$ -normalverteilte Zufallsvariable X_k gezogen und damit der Vektor \underline{x}_k der normalverteilten Zufallszahlen ergänzt. Die gezogene Zufallszahl weist den Erwartungswert 0 und die Varianz 1 auf. Dieser Schritt wird für jede zu simulierende Rauschquelle durchgeführt.

25. Des weiteren wird eine Größe μ_x gebildet. Sie wird aus den ersten $(n - 1)$ Komponenten der n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} und aus der Sequenz von $(n-1) \cdot 1/f$ -verteilten Zufallszahlen gebildet, die für die vorausgehenden $(n-1)$ Simulations-Zeitschritte berechnet wurden. Hierzu wird gemäß Formel (3.9) vorgegangen. Dieser Schritt wird für jede 30 zu simulierende Rauschquelle k durchgeführt.

Schließlich wird dasjenige Element der Matrix NOISE berechnet, dessen Spaltenindex k die zu simulierende Rauschquelle

FIN 196 P/200019753

19

angibt und dessen Zeilenindex gleich n ist. Hierdurch wird der aktuelle Simulations-Zeitschritt bezeichnet. Das aktuell berechnete Element $r(k, n)$ der Matrix NOISE stellt eine Zufallszahl dar, die zusammen mit den darüberstehenden $(n-1)$ 5 Elementen derselben Spalte k von NOISE einen Vektor y_k der Länge n aus $1/f$ -verteilten Zufallszahlen bildet. Dieser Vektor y_k dient zur Simulation einer der Rauschquellen für die ersten n Simulationszeitschritte.

10 Jedes Element y_k der n -ten Zeile von NOISE wird dann aufgrund der Gleichungen (3.7)-(3.9) aus der letzten Zufallszahl x_k des Vektors x und den Größen μ_x und σ bestimmt, und zwar nach folgender Vorschrift:

15
$$y_k = x_k * \sigma + \mu_x$$

In den Figuren 3 bis 5 sind Ausführungsbeispiele wiedergegeben, die konkrete Berechnungsergebnisse wiedergeben.

20 Der Wert des Spektralwerts β wird dabei stets als 0.5 angenommen. Der Wert der Intensität const wird willkürlich als 1.0 angenommen. Es werden jeweils drei Zufallszahlen gleichzeitig verarbeitet, entsprechend der Simulation von drei gleichzeitig an separaten Kanälen auf das zu simulierende System einwirkenden Rauschquellen, die jeweils in einem Vektor y_k angeordnet sind, wobei k ein ganzzahliger Wert von 1 bis 3 ist.

25 Figur 3 zeigt anhand ihrer Teilfiguren 3a bis 3f ein Berechnungsbeispiel für einen ersten Simulations-Zeitschritt $[t_0, t_1] = [0, 0.5]$.

FIN 196 P/200019753

20

Figur 3a zeigt die Covarianzmatrix \underline{C} der Dimension 1x1 zur Erzeugung einer 1/f-verteilten Zufallszahl bei der Simulations-Schrittweite. \underline{C} stellt hier nur einen Skalar mit dem Wert 0.70 dar, denn $\underline{C}(1,1)$ - also mit $i=j=1$ - ergibt sich unter Anwendung von Gleichung (3.6) zu

$$1.0 \cdot \left(-|t_1 - t_1|^{0.5+1} + |t_{1-1} - t_1|^{0.5+1} + |t_1 - t_{1-1}|^{0.5+1} - |t_{1-1} - t_{1-1}|^{0.5+1} \right) = \\ 0 + 0.5^{1.5} + 0.5^{1.5} - 0 = 0.707106\dots;$$

Figur 3b zeigt die Inverse der Covarianzmatrix \underline{C} aus Figur 10 3a, was hier mittels einer nicht näher dargestellten Cholesky-Zerlegung erfolgte. Eine Überprüfung von $(\underline{C} \underline{C}^{-1}) = (0.707106\dots \ 0.707106\dots^{-1})$ ergibt den richtigen Wert 1, was die Richtigkeit des Werts für $\underline{C}(1,1)$ veranschaulicht.

15 Figur 3c zeigt eine Größe σ für den ersten Simulations- schritt $n=1$. Sie ergibt sich aus der Gleichung

$$\sigma = \text{sqrt}(1 / 0.707106\dots),$$

20 wobei sqrt die Quadratwurzel und $\underline{e}(1,1)$ das durch (1,1) indi- zierte Element 0.707106... der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} bezeichnet.

Figur 3d zeigt drei Werte x_1, x_2, x_3 einer $(0,1)$ - 25 normalverteilte Zufallsvariable X_k für je eine zu simulieren- de Rauschquelle. Diese Werte bilden die ersten Elemente je eines Vektors \underline{x}_k der normalverteilten Zufallszahlen. Die ge- zogenen Zufallszahlen weisen den Erwartungswert 0 und die Va- rianz 1 auf.

30 Figur 3e zeigt drei Größen μ_k für jede der drei zu simulie- renden Rauschquellen. Die Größe μ_k ergibt sich gemäß Formel

FIN 196 P/200019753

21

(3.9) aus den ersten ($n - 1$) Komponenten der n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix $\underline{\underline{C}}^{-1}$ sowie aus der Sequenz von ($n - 1$) Stück $1/f$ -verteilten Zufallszahlen, die für die vor- ausgehenden ($n - 1$) Simulations-Zeitschritte berechnet wurden. Im ersten Simulationsschritt haben diese beiden Vektoren jeweils die Länge 0. Somit ergibt sich für alle Größen μ_k im ersten Simulationsschritt: $\mu_k = 0$;

Figur 3f zeigt drei Vektoren \underline{y}_k der Länge 1 von $1/f$ - verteilte Zufallszahlen, die das Verhalten von drei $1/f$ - verteilten Rauschquellen für den ersten Simulations- Zeitschritt $[0, t_1] = [0, 0.5]$ simulieren. Die Matrix NOISE ergibt sich aus den drei Vektoren \underline{y}_k . Der Wert k ist dabei ein ganzzahliger Wert von 1 bis 3. Jedes Element y_k der ersten Zeile von NOISE wird aufgrund von Gleichungen (3.7) - (3.9) nach folgender Vorschrift aus der letzten Zufallszahl x_k des zugehörigen Vektors \underline{x} und den Größen μ_k und σ_1 bestimmt. Beispielhaft wird nachfolgend das erste Element $y_1(n=1)$ des ersten Vektors \underline{y}_1 berechnet:

20

$$\begin{aligned} y_1(n=1) &= x_1(n=1) * \sigma + \mu_1 = \\ &= -0.35\ldots * 0.84\ldots + 0.00\ldots = \\ &= -0.30\ldots; \end{aligned}$$

25 $y_2(n=1)$ und $y_3(n=1)$ werden analog hierzu berechnet.

Figur 4 zeigt anhand ihrer Teilfiguren 4a bis 4f ein Berechnungsbeispiel für einen zweiten Simulations-Zeitschritt $[t_1, t_2] = [0.5, 0.75]$. Der Wert n für den zweiten Simulations- Zeitschritt ist stets gleich 2.

Figur 4a zeigt die Covarianzmatrix $\underline{\underline{C}}$ der Dimension $(n \times n) = 2 \times 2$, die zur Erzeugung je einer weiteren Zufallszahl pro

FIN 196 P/200019753

22

Rauschquelle benötigt wird. Die so neu erzeugte Zufallszahl bildet zusammen mit dem Resultat gemäß Figur 3f einen Vektor \underline{y}_k der Länge 2 aus 1/f-verteilten Zufallszahlen. Je Rauschquelle wird dabei ein Vektor \underline{y}_k erzeugt. Die Covarianzmatrix \underline{C} wird dabei nach Gleichung (3.6) bestimmt.

Beispielhaft wird dies am Element $\underline{C}(2,1)$ - also mit $i=2$ und $j=1$ - durchgeführt. Unter Anwendung von Gleichung (3.6) ergibt sich $\underline{C}(2,1)$ zu

$$10 \quad 1.0 \cdot \left(-|t_1 - t_2|^{0.5+1} + |t_1 - t_2|^{0.5+1} + |t_1 - t_{2-1}|^{0.5+1} - |t_{2-1} - t_{2-1}|^{0.5+1} \right) = \\ = \left(-|0.5 - 0.75|^{0.5+1} + |0 - 0.75|^{0.5+1} + |0.5 - 0.5|^{0.5+1} - |0 - 0.5|^{0.5+1} \right) = \\ -0.125 + 0.6495. + 0 - 0.3535... = 0.1709...;$$

Figur 4b zeigt die Inverse der Covarianzmatrix \underline{C} aus Figur 4a. Eine hier nicht dargestellte Überprüfung der Bedingung $(\underline{C} \underline{C}^{-1})$ ergibt eine Matrix der Dimension 2x2, bei der die mit (1,1) und (2,2) indizierten Elemente gleich 1 sind. Die anderen Elemente haben den Wert 0.

Figur 4c zeigt eine Größe σ , die aus der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} von Schritt 4b berechnet wird. Die Größe σ ergibt sich als

$$\sigma = \text{sqrt}(1 / e(1,1)) = \text{sqrt}(1 / e(2,2)) = \\ = \text{sqrt}(1 / 4.79...) = 0.45...;$$

25 wobei sqrt die Quadratwurzel und $e(2,2)$ das durch (2,2) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} aus Figur 4b bezeichnen.

Figur 4d zeigt drei Vektoren \underline{x}_k von unabhängigen (0,1)-normalverteilten Zufallszahlen, wobei die Vektoren \underline{x}_k jeweils die Länge 2 haben. Pro zu simulierender Rauschquelle wird ei-

ne $(0, 1)$ -normalverteilte Zufallsvariable x_k gezogen. Die gezogene Zufallszahl weist jeweils den Erwartungswert 0 und die Varianz 1 auf. Damit werden die Vektoren \underline{x}_k der normalverteilten Zufallszahlen aus Figur 3d ergänzt, so daß sich die 5 Vektoren \underline{x}_k der normalverteilten Zufallszahlen aus Figur 4d ergeben.

Figur 4e zeigt drei Größen μ_k , die aus der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} gemäß Schritt 4b und aus den drei Zufallszahlen gemäß Schritt 3f berechnet worden sind. Für jede zu simulierende Rauschquelle wird die Größe μ_k aus den $(n - 1)$ ersten Komponenten der n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} und aus der Sequenz von $(n-1)$ Stück 1/f-verteilten Zufallszahlen berechnet, die gemäß Formel (3.9) für die vor 10 ausgegangenen $(n - 1)$ Simulations-Zeitschritte berechnet wurden. Im zweiten Simulations Schritt wird die Größe μ_k also aus der ersten Komponente der zweiten Zeile von \underline{C}^{-1} sowie aus 15 der ersten Komponente des Vektors \underline{y}_k berechnet. Beispieldhaft wird dies anhand des Werts μ_1 durchgeführt:

20

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{\underline{y}_{(n-1)1} \cdot \underline{C}^{-1}}{\underline{C}_{n,n}} \\ &= \frac{-0.30 \dots -1.15 \dots}{4.79} \\ &= -0.07 \dots;\end{aligned}$$

25 Figur 4f zeigt drei Vektoren \underline{y}_k der Länge 2 mit 1/f-verteilten Zufallszahlen, die das Verhalten von drei 1/f-verteilten Rauschquellen für den zweiten Simulations-Zeitschritt $[t_1, t_2] = [0.5, 0.75]$ simulieren. Die Matrix NOISE ergibt sich aus den drei Vektoren \underline{y}_k . Der Wert k ist dabei 30 ein ganzzahliger Wert von 1 bis 3. Jedes Element y_k der zwei-

FIN 196 P/200019753

24

ten Zeile von NOISE wird aufgrund der Gleichungen (3.7)-(3.9) nach folgender Vorschrift aus der letzten Zufallszahl x_k des zugehörigen Vektors \underline{x} und den Größen μ_k und σ bestimmt. Beispieldart wird nachfolgend das zweite Element $y_1(n=2)$ des ersten Vektors \underline{y}_1 berechnet:

$$\begin{aligned} y_1(n=2) &= x_1(n=2) * \sigma + \mu_1 = \\ &= 0.39... * 0.45... - 0.07... = \\ &= 0.10...; \end{aligned}$$

10

Figur 5 zeigt anhand ihrer Teilfiguren 5a bis 5f ein Berechnungsbeispiel für einen dritten Simulations-Zeitschritt $[t_2, t_3] = [0.75, 1.25]$. Der Wert n während des dritten Simulations-Zeitschritts ist stets gleich 3.

15

Figur 5a zeigt die Covarianzmatrix \underline{C} der Dimension $(n \times n) = 3 \times 3$, die zur Erzeugung je einer weiteren Zufallszahl pro Rauschquelle benötigt wird. Die so neu erzeugte Zufallszahl bildet zusammen mit dem Resultat gemäß Figur 4f einen Vektor \underline{y}_k der Länge 3 aus 1/f-verteilten Zufallszahlen. Je Rauschquelle wird dabei ein Vektor \underline{y}_k erzeugt. Die Covarianzmatrix \underline{C} wird dabei nach Gleichung (3.6) bestimmt.

Beispielhaft wird dies am Element $\underline{C}(3,1)$ - also mit $i=3$ und $j=1$ - durchgeführt. Unter Anwendung von Gleichung (3.6) ergibt sich $\underline{C}(3,1)$ zu

$$\begin{aligned} 1.0 \cdot \left(-|t_1 - t_3|^{0.5+1} + |t_{1-1} - t_3|^{0.5+1} + |t_1 - t_{3-1}|^{0.5+1} - |t_{1-1} - t_{3-1}|^{0.5+1} \right) &= \\ = \left(-|0.5 - 1.25|^{0.5+1} + |0 - 1.25|^{0.5+1} + |0.5 - 0.75|^{0.5+1} - |0 - 0.75|^{0.5+1} \right) &= \\ -0.6495... + 1.3975... + 0.125 - 0.6495... &= 0.22...; \end{aligned}$$

FIN 196 P/200019753

25

Figur 5b zeigt die Inverse \underline{C}^{-1} der Covarianzmatrix \underline{C} aus Figur 5a. Eine hier nicht dargestellte Überprüfung der Bedingung $(\underline{C} \underline{C}^{-1})$ ergibt eine Matrix der Dimension 3x3, bei der die mit (1,1), (2,2) und (3,3) indizierten Elemente gleich 1 sind. Die anderen Elemente haben den Wert 0.

Figur 5c zeigt eine Größe σ , die aus der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} von Schritt 5b berechnet wird. Die Größe σ ergibt sich als

10

$$\sigma = \text{sqrt}(1 / e(3,3)) = \text{sqrt}(1 / 1.75\ldots) = \\ = \text{sqrt}(1 / 1.75\ldots) = 0.75\ldots;$$

15

wobei sqrt die Quadratwurzel und $e(3,3)$ das durch (3,3) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} aus Figur 5b bezeichnen.

20

Figur 5d zeigt drei Vektoren \underline{x}_k von unabhängigen (0,1)-normalverteilten Zufallszahlen, wobei die Vektoren \underline{x}_k jeweils die Länge 3 haben. Pro zu simulierender Rauschquelle wird eine (0,1)-normalverteilte Zufallsvariable x_k gezogen. Die gezogene Zufallszahl weist jeweils den Erwartungswert 0 und die Varianz 1 auf. Damit werden die Vektoren \underline{x}_k der normalverteilten Zufallszahlen aus Figur 4d ergänzt, so daß sich die Vektoren \underline{x}_k der normalverteilten Zufallszahlen aus Figur 5d ergeben.

25

Figur 5e zeigt drei Größen μ_k , die aus der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} gemäß Schritt 5b und aus den drei Zufallszahlen gemäß Schritt 4f berechnet worden sind. Für jede zu simulierende Rauschquelle wird die Größe μ_k aus den (n-1) ersten Komponenten der n-ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} und aus der Sequenz von (n-1) Stück 1/f-verteilten Zu-

FIN 196 P/200019753

26

fallszahlen berechnet, die gemäß Formel (3.9) für die voraus-
gegangenen $(n - 1)$ Simulations-Zeitschritte berechnet wurden.

Im zweiten Simulationsschritt wird die Größe μ_k also aus der
ersten beiden Komponenten der dritten Zeile von \underline{C}^{-1} sowie aus

5 den ersten beiden Komponenten des Vektors \underline{y}_k berechnet. Bei-
spielhaft wird dies anhand des Werts μ_1 durchgeführt:

$$\mu_1 = \frac{\underline{y}^T_{(n-1)} \cdot \underline{C}^{-1}}{\underline{C}^{-1} \cdot \underline{e}_{n,n}} =$$

$$= \frac{-0.30... - 0.31... + 0.10... - 0.98...}{1.75...} =$$

$$10 = -0.00...;$$

Figur 5f zeigt drei Vektoren \underline{y}_k der Länge 3 mit
1/f-verteilten Zufallszahlen, die das Verhalten von drei 1/f-
verteilten Rauschquellen für den dritten Simulations-

15 Zeitschritt $[t_2, t_3] = [0.75, 1.25]$ simulieren. Die Matrix
NOISE ergibt sich aus den drei Vektoren \underline{y}_k . Der Wert k ist
dabei ein ganzzahliger Wert von 1 bis 3. Jedes Element
20 $\underline{y}_k(n=3)$ der dritten Zeile von NOISE wird aufgrund der Glei-
chungen (3.7) – (3.9) nach folgender Vorschrift aus der letzten
Zufallszahl $x_k(n=3)$ des zugehörigen Vektors \underline{x} und den Größen
 μ_k und σ bestimmt. Beispielhaft wird nachfolgend das dritte
Element $\underline{y}_1(n=3)$ des ersten Vektors \underline{y}_1 berechnet:

$$25 \quad \underline{y}_1(n=3) = \underline{x}_1(n=3) * \sigma + \mu_1 =$$

$$= -0.90... * 0.75... + 0.00... =$$

$$= 0.67...;$$

Zur konkreten Ausführung der gezeigten Berechnungsbeispiele

30 sind noch folgende Bedingungen zu beachten.

FIN 196 P/200019753

27

Die in den Figuren 3, 4 und 5 gezeigten Zahlenwerte geben Zwischen- und Endergebnisse der mit Bezug auf Figur 2 beschriebenen Rechenschritte für ein erstes, für ein zweites und für ein drittes Simulationsintervall wieder. Dabei wurden alle Werte nach genauer numerischer Berechnung nach der zweiten Komma Stelle abgebrochen, um diese besser wiedergeben zu können. Bei einem rechnerischen Nachvollziehen der Ausführungsbeispiele muß daher nicht mit den in den Figuren gezeigten Zwischenwerten, sondern mit den exakten Zwischenwerten weitergerechnet werden, um ausgehend von den angegebenen x-Vektoren zu den angegebenen y-Vektoren zu gelangen.

In den Figuren 3c, 4c und 5c sind jeweils Vektoren von (0,1)-normalverteilten Zufallsvariablen gezeigt. Dabei stellt jeweils eine Zufallsvariable eine Rauschquelle dar. Hier wird der Einfachheit halber nicht dargestellt, wie man zu solchen Zufallszahlen mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz 1 gelangt. Dies ist dem Fachmann geläufig.

20

Patentansprüche

1. Verfahren zum Erzeugen wenigstens einer Folge von Zufallszahlen eines $1/f$ -Rauschens, das die folgenden Schritte aufweist:

- Bestimmen eines gewünschten Spektralwerts β ,
- Bestimmen der Anzahl der zu erzeugenden Zufallszahlen eines $1/f$ -Rauschens,
- Bestimmen einer Intensitätskonstante const ,
- Festlegen eines Startwerts für eine Laufvariable n , wobei solange, bis die gewünschte Anzahl von Elementen $y(n)$ eines Vektor y der Länge n aus $1/f$ -verteilten Zufallszahlen berechnet ist, das schleifenartige Wiederholen der folgenden Schritte vorgesehen ist:
- Erhöhen des aktuellen Werts der Laufvariable n um 1,
- Festlegen eines Simulationszeitschritts $[t_{n-1}; t_n]$,
- Bestimmen der Elemente \underline{C}_{ij} einer Covarianzmatrix \underline{C} der Dimension $(n \times n)$ nach der folgenden Vorschrift:

$$\underline{C}_{ij} := \text{const} \cdot \left(-|t_j - t_i|^{\beta+1} + |t_{j-1} - t_i|^{\beta+1} + |t_j - t_{i-1}|^{\beta+1} - |t_{j-1} - t_{i-1}|^{\beta+1} \right),$$

$i, j = 1, \dots, n$

- Bestimmen einer Matrix \underline{C}^{-1} durch Invertieren der Covarianzmatrix \underline{C} ,
- Bestimmen einer Größe σ gemäß der Vorschrift

$$\sigma = \text{sqrt}(1 / e(n, n)),$$

wobei sqrt die Funktion "Quadratwurzel" und wobei

25 $e(n, n)$ das durch (n, n) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} bezeichnet,

- Bestimmen einer $(0, 1)$ -normalverteilten Zufallszahl, die die n -te Komponente eines Vektors \underline{x} der Länge n bildet,
- Bilden einer Größe μ aus den ersten $(n - 1)$ Komponenten der n -ten Zeile der invertierten

FIN 196 P/200019753

29

Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} und den $(n-1)$ Elementen des Vektors \underline{y} , die für einen vorausgehenden $(n-1)$ Simulations-Zeitschritt berechnet wurden, und zwar gemäß der folgenden Vorschrift:

5

$$\mu = -\frac{\underline{y}_{(n-1)}^T \cdot \underline{C}_{(n,n)}^{-1}}{\underline{C}_{(n,n)}^{-1}}$$

10

wobei $\underline{y}_{(n-1)}$ die ersten $(n-1)$ Komponenten des Vektors \underline{y} bezeichnet, wobei $\underline{C}_{(n,n)}^{-1}$ die ersten $(n-1)$ Komponenten der n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} bezeichnet und wobei $\underline{C}_{(n,n)}^{-1}$ das mit (n,n) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} bezeichnet,
 - Berechnen eines Element $y(n)$ eines Vektor \underline{y} der Länge n aus 1/f-verteilten Zufallszahlen nach folgender Vorschrift:

15

$$Y(n) = \underline{x}(n) * \sigma + \mu$$

20

2. Verfahren nach Anspruch 1,

dadurch gekennzeichnet, daß

q Folgen von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens gleichzeitig berechnet werden, wobei anstelle der folgenden gemäß

25

Anspruch 1 schleifenartig zu wiederholenden Schritte:

- Bestimmen einer $(0,1)$ -normalverteilten Zufallszahl, die die n -te Komponente eines Vektors \underline{x} der Länge n bildet,
- Bilden einer Größe μ aus den ersten $(n-1)$ Komponenten der n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix \underline{C}^{-1} und den $(n-1)$ Elementen des Vektors \underline{y} , die für einen vorausgehenden $(n-1)$ Simulations-Zeitschritt berechnet wurden, und zwar gemäß der folgenden Vorschrift:

FIN 196 P/200019753

30

$$\mu = -\frac{\underline{y}_{(n-1)}^T \cdot \underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}}{\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}}$$

wobei $\underline{y}_{(n-1)}$ die ersten $(n - 1)$ Komponenten des Vektors \underline{y} bezeichnet, wobei $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}$ die ersten $(n - 1)$ Komponenten der n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix $\underline{\underline{C}}^{-1}$ bezeichnet und wobei $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}$ das mit (n,n) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix $\underline{\underline{C}}^{-1}$ bezeichnet.

- Berechnen eines Element $y(n)$ eines Vektor \underline{y} der Länge n aus 1/f-verteilten Zufallszahlen nach folgender Vorschrift:

10

$$Y(n) = \underline{x}(n) * \sigma + \mu$$

die folgenden Schritte vorgesehen sind:

- Bestimmen von q Stück $(0,1)$ -normalverteilte Zufallszahlen $\underline{x}_{k,n}$, die die jeweils letzte Komponente der Vektoren \underline{x}_k der Länge n bilden, wobei $k = 1, \dots, q$,
- Bilden von q Größen μ_k gemäß der folgenden Vorschrift:

$$\mu_k = -\frac{\underline{y}_{(n-1),k}^T \cdot \underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}}{\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}}$$

wobei $\underline{y}_{(n-1),k}$ die ersten $(n - 1)$ Komponenten des Vektors \underline{y}_k bezeichnet, die für einen vorausgehenden Simulations-Zeitschritt berechnet wurden. $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}$ bezeichnet die ersten $(n - 1)$ Komponenten n -ten Zeile der invertierten Covarianzmatrix $\underline{\underline{C}}^{-1}$ und $\underline{\underline{C}}_{n,n}^{-1}$ bezeichnet das mit (n,n) indizierte Element der invertierten Covarianzmatrix $\underline{\underline{C}}^{-1}$. Dies wird für $k = 1, \dots, q$ durchgeführt.

- Berechnen von q Elementen $y_{k,n}$, die die jeweils n -te Komponente des Vektors \underline{y}_k der Länge n aus 1/f-

FIN 196 P/200019753

31

verteilten Zufallszahlen bilden, und zwar nach folgen-
der Vorschrift:

$$y_{k,n} = x_{k,n} * \sigma + \mu_k$$

5

wobei $k = 1, \dots, q$.

3. Verfahren zur Simulation eines technischen Systems, das einem 1/f-Rauschen unterliegt, bei dem bei der Modellie-
10 rung und/oder bei der Festlegung der an Eingangskanälen
des Systems anliegenden Größen Zufallszahlen verwendet
werden, die nach einem Verfahren gemäß den vorhergehenden
Ansprüchen bestimmt worden sind.
- 15 4. Computerprogramm zur Bestimmung von Folgen von Zufalls-
zahlen eines 1/f-Rauschens, das so ausgebildet ist, daß
ein Verfahren gemäß einem der vorhergehenden Ansprüche
ausführbar ist.
- 20 5. Datenträger mit einem Computerprogramm nach Anspruch 4.
6. Verfahren, bei dem ein Computerprogramm nach Anspruch 4
aus einem elektronischen Datennetz wie beispielsweise aus
dem Internet auf einen an das Datennetz angeschlossenen
25 Computer heruntergeladen wird.
7. Computersystem, auf dem ein Verfahren zur Bestimmung von
Folgen von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens nach einem
der Ansprüche 1 bis 3 ausführbar ist.

FIN 196 P/200019753



32

Zusammenfassung

Verfahren zum bedarfsorientierten Erzeugen einzelner Zufallszahlen einer Folge von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens

5

Ein Verfahren zum adaptiven Erzeugen einer Folge von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens beruht auf der Verwendung (0,1)-normalverteilter Zufallszahlen. Mit der Erfindung ist eine bedarfsorientierte Erzeugung von Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens möglich, wobei zusätzliche Zufallszahlen eines 1/f-Rauschens auch während einer Simulationsrechnung möglich sind.

[Fig. 2]

15

FIN 196 P/200019753

33

Bezugszeichenliste

- 1 Systemmodell
- 2 Eingangskanäle
- 5 3 Ausgangskanäle
- 4 Rauscheingangskanäle

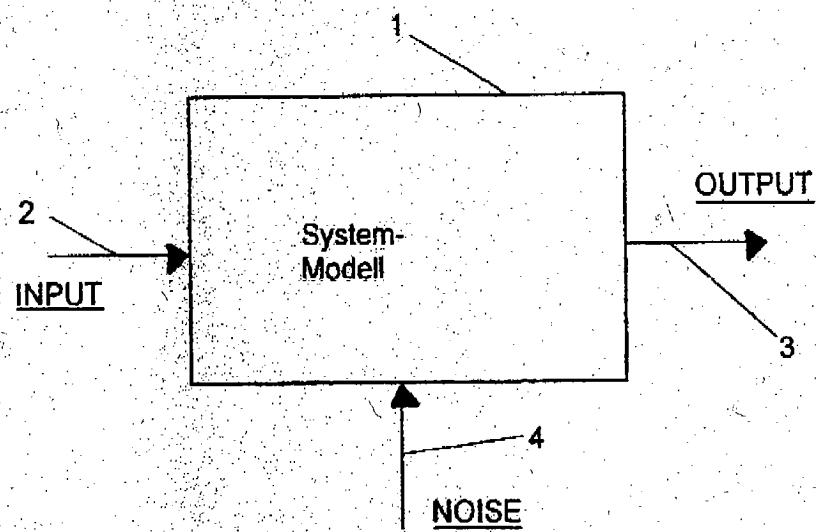


Fig. 1

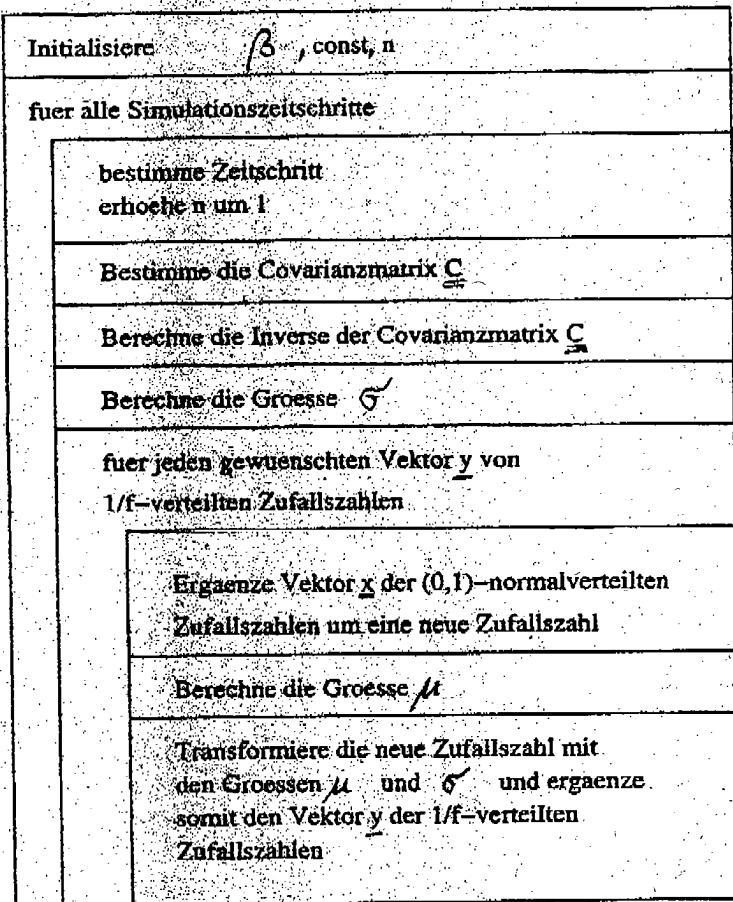


Fig. 2

$$\underline{\Sigma} = [0.70]$$

Fig. 3a

$$\underline{\Sigma}^{-1} = [1.41]$$

Fig. 3b

$$\sigma = 0.84$$

Fig. 3c

x-Vektor Nr. 1: [-0.35]

x-Vektor Nr. 2: [1.73]

x-Vektor Nr. 3: [0.79]

Fig. 3d

μ für x-Vektor Nr. 1: 0.00

μ für x-Vektor Nr. 2: 0.00

μ für x-Vektor Nr. 3: 0.00

Fig. 3e

y-Vektor Nr. 1: [-0.30]

y-Vektor Nr. 2: [1.45]

y-Vektor Nr. 3: [0.66]

Fig. 3f

Fig. 3

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.17 \\ 0.17 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Fig. 4a

$$\underline{\underline{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.69 & -1.15 \\ -1.15 & 4.79 \end{bmatrix}$$

Fig. 4b

$$\sigma = 0.45$$

Fig. 4c

x-Vektor Nr. 1: [-0.35, 0.39]
 x-Vektor Nr. 2: [1.73, 2.24]
 x-Vektor Nr. 3: [0.79, -0.46]

Fig. 4d

μ für x-Vektor Nr. 1: -0.07
 μ für x-Vektor Nr. 2: 0.35
 μ für x-Vektor Nr. 3: 0.16

Fig. 4e

y-Vektor Nr. 1: [-0.30, 0.10]
 y-Vektor Nr. 2: [1.45, 1.37]
 y-Vektor Nr. 3: [0.66, -0.05]

Fig. 4f

Fig. 4

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.17 & 0.22 \\ 0.17 & 0.25 & 0.17 \\ 0.22 & 0.17 & 0.70 \end{bmatrix}$$

Fig. 5a

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1.75 & -0.98 & -0.31 \\ -0.98 & 5.34 & -0.98 \\ -0.31 & -0.98 & 1.75 \end{bmatrix}$$

Fig. 5b

$$\sigma = 0.75$$

Fig. 5c

x-Vektor Nr. 1: [-0.35, 0.39, -0.90]

x-Vektor Nr. 2: [1.73, 2.24, -0.26]

x-Vektor Nr. 3: [0.79, -0.46, 0.53]

Fig. 5d

μ für x-Vektor Nr. 1: 0.00

μ für x-Vektor Nr. 2: 1.03

μ für x-Vektor Nr. 3: 0.09

Fig. 5e

y-Vektor Nr. 1: [-0.30, 0.10, -0.67]

y-Vektor Nr. 2: [1.45, 1.37, 0.83]

y-Vektor Nr. 3: [0.66, -0.05, 0.49]

Fig. 5f

Fig. 5